A 30. ORTVAY RUDOLF FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI 1999

Az ELTE TTK Fizikus Diákköre, a Magyar Fizikus Hallgatók Egyesülete és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 1999-ben is meghirdeti a hagyományos, immár 30-ik, ezúttal már másodszor nemzetközi Ortvay Rudolf Fizikai Feladatmegoldó Versenyt. Időpont: 1999. november 5 — 15.

Az Ortvay versenyen minden — hazai és külföldi — egyetemi hallgató indulhat — az értékelés és a díjazás évfolyamonként történik. A doktoranduszok külön kategóriát alkotnak. A verseny egyéni: páros vagy csoportosan írt dolgozatokat nem fogadunk el. Kérjük a beadott feladatokon megadni a versenyző egyetemét, szakát és évfolyamát. Álnév vagy jelszó nem használható, minden versenyző valódi néven indul.

A feladatok 1999. november 5-én, pénteken, közép-európai idő szerint 12 órától (11:00 GMT) magyar és angol nyelven, html, LaTeX és Postscript formátumban letölthetők az Ortvay-verseny weblapjáról

http://mafihe.elte.hu/ortvay.

Budapesten emellett a feladatok — ugyanettől az időponttól — nyomtatott formában is átvehetők az ELTE Lágymányosi Fizika-Kémia tömbjének (H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A) földszinti társalgójában. A lágymányosi Mafihe irodában a későbbiekben egy mesterpéldány áll a fénymásolni kivánók rendelkezésére.

A BME-n, a JATE-n, a KLTE-n, a JPTE-n és számos külföldi egyetemen helyi szervezők intézik a feladatok sokszorosítását és kiosztását.

Figyelem! A szervezők minden igyekezete ellenére is előfordulhat, hogy egy-egy értelemzavaró fogalmazási vagy gépelési hiba marad a feladatok szövegében. Érdemes ezért a továbbiakban is figyelni a fenti weblapot, illetve a lágymányosi Mafihe hirdetőtáblát, ahol az esetleges javításokat, módosításokat azonnal közzétesszük.

Egy versenyző maximálisan 10 feladat megoldását adhatja be. Minden feladat megoldására maximálisan 100 pontot lehet kapni.

A feladatok megoldásához *bármilyen segédeszköz használható*. Könyvre, folyóiratcikkre hivatkozni lehet.

Minden feladat megoldását külön A4-es lap(ok)ra kérjük leírni. Egy lapnak csak az egyik oldalára írjunk vagy nyomtassunk! Ne írjunk ceruzával vagy vékony másolópapírra — ezeket nem tudjuk elfaxolni a megoldások javítóinak. Az ilyen dolgozatokat nem fogadjuk el.

Ha a megoldáshoz számítógépes program is tartozik, kérjük írásban megadni a program részletes dokumentációját (milyen nyelven íródott, hogyan lehet elindítani, milyen paramétereket lehet beállítani, melyik betű mit jelent, hogyan kell a program készítette ábrákat vagy táblázatokat értelmezni, stb.) A programokat floppylemezen lehet mellékelni, vagy e-mailen lehet elküldeni az alább megadott címre.

A megoldásokat személyesen, postán, faxon vagy e-mailen (TeX, LaTeX vagy Postscript formátumban, vagy — ha nincsenek benne képletek — közönséges elektronikus levélben) lehet beküldeni. Kérjük, hogy csak az alapvető LaTeX style file-okat használják, vagy a felhasznált speciális stilus file-okat mellékeljék a beadott anyaghoz. Az elektronikusan beadott dolgozatokhoz — külön e-mailben — kérjük csatolják a tartalomjegyzéket és az esetleges kibontási útmutatót.

Személyesen a lágymányosi Északi tömbben, a Hallgatói Irodában lehet a megoldásokat leadni.

Postacím: ELTE TTK Fizikus Diákkör, Dávid Gyula, ELTE TTK Atomfizika Tanszék
H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A
Faxszám: Dávid Gyula, 36/1/3722775
E-mail cím: dgy@ludens.elte.hu.

Beadási határidő: november 15. hétfő, közép-európai idő szerint 12 óra (11:00 GMT).

Kérjük, hogy a feladatok valamilyen formában történt postázása után minden versenyző töltse ki a verseny weblapjáról nyíló adatlapot. Ez versenyzők és beadott megoldásaik azonosítására szolgál.

A verseny díjazása évfolyamonként történik, az összpontszám alapján. A zsüri fenntartja a jogot, hogy egyes díjakat ne, megosztva vagy több példányban adjon ki. A pénzjutalommal járó első, második és harmadik díjak mellett dicséretek, illetve egyes feladatok kivaló megoldásáért különdíjak is odaítélhetők. Ezért már egy-két feladat megoldását is érdemes beadni!

Az idei verseny szponzorai az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, az ELTE TTK Hallgatói Alapítványa, a CAT SCIENCE BT., Serényi Tamás és Major Márton fizikus hallgatók. Köszönjük az eddigi támogatásokat — és köszönettel fogadjuk a továbbiakat is.

A verseny eredményhirdetése december 9-én lesz, a hagyományos Fizikus Mikulással egybekötve. A pontos helyszínt később közöljük a verseny weblapján. Az ünnepélyes eredményhirdetést a feladatok megoldásának megvitatása követi. Az egyes feladatok legjobb megoldóit ezennel előre felkérjük, hogy ismertessék megoldásaikat. (A verseny egész Földre kiterjedt volta ellenére ez a felkérés értelemszerűen csak a hazai versenyzőkre vonatkozik.) A részletes eredmény ezután megtekinthető lesz a verseny weblapján. A díjazott versenyzőket e-mailben értesítjük, az okleveleket és a pénzjutalmakat postán küldjük el.

A verseny feladatait és megoldásaikat — az egyes feladatok legjobb megoldóinak szövegezésében (melyre őket ezennel felkérjük) — angol nyelvű kiadványban szeretnénk megjelentetni. Ezt a kiadványt a fizikushallgatók nemzetközi szervezete, az IAPS, valamint a verseny résztvevői segítségével világszerte terjeszteni kívánjuk. Reméljük, ez még jobban hozzájárul a verseny nemzetközivé válásához.

Sikeres versenyzést, tartalmas és hasznos fejtörést kívánunk minden versenyzőnek!

A verseny szervezői

1. Állva hintázunk. A szélső helyzetben leguggolunk, a hinta középső helyzetében felállunk. Vizsgáljuk ennek a parametrikus rezonanciának a tulajdonságát!

(Tichy Géza)

2. Függőlegesen felfelé lövünk egy jó minőségű csúzlival. A lövedék egy 1/4 hüvelyk (6.35 mm) átmérőjű tömör acélgolyó. A lövedék 12.5 másodperc múlva ér mellettünk földet. Mekkora sebességgel hagyta el a lövedék a csúzlit? Ne hanyagoljuk el a levegő ellenállását! Optimális szög alatt azonos kezdősebességgel indítva a lövedéket mekkora maximális távolságra tudjuk eljuttatni a golyót? Mekkora ez az optimális szög?

(Frei Zsolt)

3. Egy l hosszúságú, vékony, de inhomogén tömegeloszlású pálcát ferdén függőleges falnak támasztunk, az alsó végét csuklósan rögzítjük. A pálca instabil egyensúlyi helyzetében α szöget zár be a vízszintes síkkal. E helyzetből kicsit kimozdítva a pálca eldől. Milyen magasan lesz a felső vége, amikor elválik a faltól? (A súrlódás elhanyagolható.)

(Gnädig Péter)

4. Egy L-alakú cső higannyal van tele. A cső egyik, l hosszú szára vízszintes, a másik h hosszú és függőlegesen lefelé áll. A cső egy kiskocsira van erősítve, mely a vízszintes szár irányában súrlódásmentesen mozoghat. A cső és a kocsi tömege L hosszúságú higannyal egyenlő. A rendszer kezdetben nyugalomban van.

   a.) Vázoljuk kvalitatíven a kocsi és a higany mozgását, az utóbbit az üvegcsőhöz viszonyítva!

   b.) Mekkora lesz a kocsi végsebessége, ha $h = l = L$?

   (A kifolyó higany nem zavarja a kocsi mozgását. A viszkozitást és a felületi feszültséget ne vegyük figyelembe.)

(Gnädig Péter)

5. Vizsgáljuk meg, hogyan mozog egy ponttöltés egy rögzített elektromos dipól terében! Kezdetben a ponttöltés a dipól szimmetriasíkjában áll. Mennyi idő múlva és hol áll meg ismét? (A jelenséget a klasszikus mechanika keretei között tárgyaljuk, az elektrosztatikus erőkön kívűl más hatásokat elhanyagolhatunk.)

(Gnädig Péter)

6. Egy tömegpontra a hagyományos $m\mathbf{g}$ nehézségi erő mellett egy $\mathbf{F}_k = -\alpha\mathbf{v}$ alakú „közegellenállási" erő is hat, ahol az α együttható maga is függ a sebességtől. Hogyan kell α-t megválasztani ahhoz, hogy a tömegpont kinetikus energiája *állandó* legyen? Mitől furcsa egy ilyen közegellenállási erő? Oldjuk meg a ferde hajítás problémáját a fenti feltételek mellett! Az eredményt felhasználva tekintsük egy $\epsilon \ll 1$ szögű lejtőn pattogó tökéletesen rugalmas labda mozgását ilyen erők mellett, és keressünk benne „periodikus" mozgásokat, vagyis olyan pályákat, amelyekben az egymást követő pattogások közötti távolság állandó! Vizsgáljuk meg ezen megoldások stabilitását is! Milyen különbség adódik a „lefelé" és „fölfelé" haladó mozgások között?

(Kovács Zoltán)

7. Milyen $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ pályákat írhatnak le a

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\mu}{m}\left(p_x^2 + p_y^2\right)\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}\right)}$$

   Hamilton-függvényből kapható mozgásegyenletek? (μ, m, a pozitív állandók.)

(Csordás András)

8. Két egyforma felfüggesztett fém hasábot ütköztetünk egymáshoz, és egy elektromos órával mérjük a összeérés idejét. Milyen rugalmas paramétert lehet így meghatározni?

(Tichy Géza)

9. Nőne, csökkenne vagy változatlan maradna a nap hossza, ha Nagy-Britanniában áttérnének a jobboldali közlekedésre? Becsüljük meg a változás nagyságát (ha egyáltalán lenne)!

(K. F. Riley nyomán Gnädig Péter)

10. Becsüljük meg, mennyivel változik évente a Hold – Föld távolság az árapályerők hatására!

(Ligeti Zoltán)

11. A kémiai laborokból jól ismert mágneses keverővel forgatjuk a pohárban lévő vizet. Milyen alakú lesz hosszú idő múlva a víz felülete? A fordulatszám állandó, a pohár szabályos henger alakú.

(Jánosi Imre)

12. Keressük meg a Navier-Stokes egyenlet forgásszimmetrikus egzakt megoldásait két dimenzióban (viszkózus örvények), ha kezdetben $\omega = \delta(|\vec{r} - \vec{r}_0|)$ az örvényesség! Az eltűnő viszkozitás határesetében a fenti megoldások szuperpozíciójából konstruáljunk újabb egzakt megoldást! Milyen egyenletet elégítenek ki ekkor az egyes örvények középpontjai?

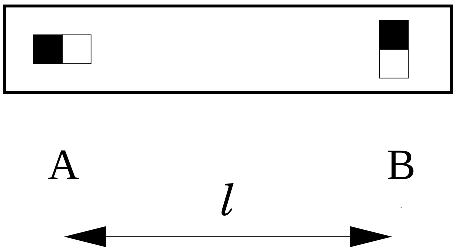
(Bene Gyula)

13. Két egyforma pontszerű mágneses dipólt (A és B) T-alakban, egymástól l távolságra, a vonalzó tömegközéppontjára szimmetrikusan egy vonalzóra rögzítünk.

a.) Mekkora és milyen irányú forgatónyomatékot fejt ki az A dipól a B-re?

b.) Mekkora és milyen irányú forgatónyomatékot fejt ki az B dipól a A-ra?

c.) Mi történik, ha a vonalzót a tömegközéppontban egy vékony fonálra felfüggesztjük?



(A földi mágneses tértől eltekinthetünk.)

(Gnädig Péter)

14. Egy bonyolult áramkör csak ellenállásokat tartalmaz. Meghatározható-e egy ellenállás értéke az áramkör megbontása nélkül? (Voltmérő, ampermérő és telep áll rendelkezésünkre.)

(Gnädig Péter)

15. Egy fekete dobozban két sorba kötött, $+U_0$, illetve $-U_0$ feszültségre feltöltött kondenzátor található. A két pozitív töltésű fegyverzet ki van vezetve a dobozból.

a.) Eldönthető-e a fekete doboz kinyitása nélkül, hogy mekkora U_0?

b.) Kinyerhető-e a kondenzátorok („zérusponti") energiája, vagy legalább annak egy része?

(Somorjai Péter Pál)

16. Tekintsünk egy végtelen hosszú, egyenletesen töltött szigetelő rudat! Ha forog a hossztengelye körül, mágneses tér indukálódik a tengelye mentén (a tengelyhez közelebb erősebb, távolabb gyengébb, kívül nulla). Számítsuk ki a mozgó töltések által keltett elektromágneses tér perdületét! A mozgó töltések (tehetetlen) perdületéhez képest ez milyen járulékot ad? Lehet-e így negatív tehetetlenségi nyomatékú rudat készíteni? (Ez rendkívül hasznos lenne, hiszen csak egy fogaskereket kellene rákötni, ami mondjuk egy generátort hajtana, majd meglökni picit, és „felfékezni" az üzemi sebességre.)

(Fehér Títusz)

17. Egy végtelen négyzetháló minden éle R ellenállású. Közismert, hogy az eredő ellenállás két szomszédos rácspont között $R/2$.

a.) Hogyan függ két rácspont között mért ellenállás a két rácspont közti távolságtól, ha a távolság tart a végtelenhez?

b.) Tekintsük azt a „perturbált" négyzethálót, melyben hiányzik egy R ellenállású él a négyzethálóból! Határozzuk meg az eredő ellenállást két tetszőleges rácspont között!

(Cserti József)

18. Dugattyúval lezárt hengerben lévő ideális gáz adiabatikusan tágul állandó p_k külső nyomás mellett. A gáz kezdeti nyomása $p_b(t = 0) > p_k$, térfogata pedig V_0. A nagy tömegű dugattyú súrlódásmentesen mozog a hengerben.

a.) Mekkora a dugattyú mozgási energiája abban a pillanatban, mikor $p_b = p_k$?

b.) Mekkora ez a mozgási energia, ha a gáz két lépésben tágul: először egy p_x ($p_b(t = 0) > p_x > p_k$), majd, a $p_b = p_x$ állapot elérése után p_k külső nyomás mellett történik a tágulás, míg a p_b belső nyomás eléri a p_k értéket?

c.) Mekkora ez a mozgási energia, ha végtelen sok hasonló lépésen keresztül történik a gáz tágulása? Miért?

d.) Tegyük fel, hogy a dugattyú és a henger fala között, a $p_b = p_k$ állapotnak megfelelő pozició előtti Δx szakaszon csúszó súrlódás lép föl, így a dugattyú ezen a szakaszon lefékeződve éri el ezt a poziciót, miközben teljes mozgási energiáját elveszti. A súrlódás során termelődött hő teljes egészében a T hőmérsékletű környezetnek adódik át lassú hőmérséklet–kiegyenlítődés során. Mikor lesz nagyobb a gáz és a környezet együttes entrópianövekedése, ha egy hosszabb Δx szakaszon hat kisebb, vagy egy rövidebb Δx szakaszon hat nagyobb súrlódási erő?

(Hantz Péter)

19. Az űrben lebeg egy lapos, fekete szinű korong. A két lapja között a hővezetés elhanyagolható. A korong a tengelyével párhuzamosan, a kozmikus háttérsugárzáshoz képest (nem túl nagy) v_0 sebességgel mozog forgás nélkül. Kezdetben a két lapjának hőmérséklete megegyezik a háttérsugárzáséval. A háttérsugárzással kölcsönhatva hogyan fog a sebesség időben változni? Lehet, hogy valamikor előjelet vált? Ha igen, milyen anyagból készült a korong?

(Fehér Títusz)

20. Ha egy pénzérmét feldobunk, akkor jó közelítéssel véletlenszerűen fog vagy fejre, vagy írásra esni. Ennek oka a pörgő érme mozgásának kezdeti feltételekre való érzékenysége. Vizsgáljuk a kérdést a következő kísérlettel: vízszintes lapról lassan toljunk le egy 20 forintost és jegyezzük fel, hogy fejre, vagy írásra esett-e! Ismételjük sokszor a kísérletet! Mutassuk meg, hogyan lesz a fej–írás eloszlása egyre egyenletesebb, ahogy az érme esésének ideje növekszik! Definiáljuk a pörgő pénzdarab fázisterét, és a kísérleti eredmény alapján becsüljük meg a mozgás Ljapunov-exponensét!

(Pollner Péter)

21. A tőzsdén egy adott részvény ára véletlen bolyongásnak megfelelő módon változik az egymást követő napok során. A kezdőpillanatban mindenkinek 100 egység részvénye van. A résztvevők a következő tőzsdejátékot játsszák. Az egyes résztvevők a $[0, \theta]$ időintervallum ($\theta \gg 1$ nap, és rögzített) egy véletlen időpillanatában minden részvényüket eladják, majd a következő naptól számítva újabb θ hosszú időintervallum egy véletlen időpillanatában az összes készpénzükért részvényt vásárolnak. Az résztvevők a vásárlásuk napját követő napon ismét a fenti eljárás szerint adnak el ill. vásárolnak. Feltesszük, hogy nincs tranzakciós költség.

a.) Mi a valószínűségi eloszlása a várható nyereségnek hosszú idő elteltével? Függ-e ez az eloszlásfüggvény a θ paramétertől?

b.) Mi a valószínűségi eloszlása a legjobb eredménynek? Legjobb eredménynek hosszú idő után egy adott időpillanatban a legtöbb részvénnyel rendelkező résztvevő részvényeinek értékét tekintjük.

(Jánosi Imre)

22. Egy komplex rendszer dinamikáját (gondoljunk egy bonyolult konformációjú állapotokkal rendelkező makromolekulára) a metastabil állapotok közötti átmenetekkel írjuk le. Egy α metastabil állapothoz ($\alpha = 1, \ldots, M$ és $M \gg 1$) tartozik egy τ_α élettartam: az α állapotból való kiszabadulás eloszlása exponenciális; azaz ha $p_\alpha(t)dt$ annak a valószínűsége, hogy a t és $t + dt$ között hagyja el a rendszer az α állapotot, akkor $p_\alpha(t) \sim \exp(-t/\tau_\alpha)$. A τ és $\tau + d\tau$ közötti metastabil állapotok száma legyen $M\psi(\tau)d\tau$, ahol

$$\psi(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \tau \ll \tau_0 \\ \sim \tau^{-1-x}, & \text{ha } \tau > \tau_0, \end{cases}$$

x a rendszer (általában hőmérsékletfüggő) paramétere, $0 < x < 1$. A $t = 0$ időpillanatban a rendszer véletlenszerűen választ az M állapot közül, és egy α „csapdából” való kiszabadulás után szintén véletlenszerűen esik bele egy újabb csapdába.

a.) Figyeljük $t_w \gg \tau_0$ ideig a rendszert, és becsüljük meg azt a leghosszabb időt, amit ezalatt egy metastabil állapotban töltött a rendszer!

b.) Írjunk föl egy „master”–egyenletet $P_\alpha(t)$-re! ($P_\alpha(t)$ annak valószínűsége, hogy a rendszer a t időpillanatban az α állapotban van.)

c.) Vezessük be a metastabil állapotok f_α szabadenergiáját úgy, hogy a P_α^{egy} egyensúlyi eloszlásra igaz legyen a Boltzmann–Gibbs képlet:

$$P_\alpha^{\text{egy}} \sim \exp(-f_\alpha/kT).$$

Mi a kapcsolat f_α és τ_α között?

d.) Számoljuk ki annak valószínűségét ($\Pi(t_w, t)$), hogy a rendszer t_w és $t_w + t$ között nem megy át az egyik metastabil állapotból egy másikba ($t_w \gg \tau_0$)!

(Temesvári Tamás)

23. A szóráselmélet szokásos formalizmusa szerint a $\mathbf{k}$ impulzusú részecske $U(\mathbf{r})$ potenciálon történő szóródását a

$$\left[\nabla^2 + k^2\right] \psi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}).$$

Schrödinger–egyenlet megoldásával állítjuk elő. Különösebb indoklás nélkül fel szokás tenni, hogy az egyenlet aszimptotikus megoldásának a következő alakúnak kell lennie:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \sim \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) + \frac{\exp(ikr)}{r} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{n}),$$

ahol $k = |\mathbf{k}|$, $r = |\mathbf{r}|$ és $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{n})$ pedig az úgynevezett szórásamplitudó. Csak ritkán esik szó arról, hogy ez a kifejezés a következő módon adódik: a Schrödinger–egyenletet integrálegyenletté alakítjuk, majd — rövid hatótávolságú szórócentrumok esetén — a hullámfüggvényt $1/r$ hatványai szerint haladó aszimptotikus sorba fejtjük: a fenti képlet ennek a sornak első tagját tartalmazza.

a.) Tegyük fel, hogy az $U(\mathbf{r})$ potenciál nem túlságosan szinguláris az origóban, és hogy minden p-re $r^p U(\mathbf{r}) \to 0$, ha r a végtelenbe tart. Vezessük le a hullámfüggvény *teljes* asszimptotikus sorát, melynek első tagjaként fellép a fentebb idézett szokásos aszimptotikus kifejezés második tagja!
Jó tanács: ne használjunk gömbfüggvényeket!

b.) Milyen új fizikai információt hordoznak a sor magasabb rendű tagjai? Mi lehet e tagok fizikai jelentősége?

(— M. L. ötlete nyomán — Magyar Péter)

24. „Állítsuk meg az öngyorsító elektront!” Milyen a, b, c valós konstansok esetén elégíti ki a

$$\Psi(x,t) = Ai\left[\frac{x + at^2}{x_0}\right] \exp(ibxt + ict^3)$$

hullámfüggvény a *szabad részecskére* vonatkozó egydimenziós Schrödinger–egyenletet (x_0 valós paraméter)? Ai az Airy-függvény:

$$Ai(x) = \int_0^\infty \cos(w^3/3 + wx)dw.$$

Hogyan mozog ez a hullámcsomag? Mekkora a gyorsulása? Mivel szabad részecskéről van szó, nem hat rá erő. Hogyan gyorsulhat akkor mégis? Oldjuk meg a Schrödinger–egyenletet a $V(x,t) = g(t)x$ időfüggő, lineáris potenciálban! Ehhez paraméterezzük át a teret és a hullámfüggvényt:

$$\begin{aligned} x' &= x + \alpha(t), \\ \Psi(x,t) &= e^{i\Phi(x,t)}\Psi'(x',t). \end{aligned}$$

Ekkor Ψ' egy $V'(x',t)$ potenciálban mozgó részecskét ír le (alkalmas Φ-re). Válasszuk meg úgy α-t, hogy $V'(x',t)$ ne függjön x'-től! Ezzel a problémát lényegében visszavezettük a szabad részecske feladatára, amelynek ismerjük a (fenti) megoldását. Ezzel megtaláltuk a V potenciálban mozgó részecske hullámfüggvényét (írjuk fel!), amely szintén egy Airy–függvény. Hogyan válasszuk meg $g(t)$-t, hogy a hullám *ne mozogjon*? Mit állapíthatunk meg a gyorsuló koordináta-rendszerbe való áttérés hullámfüggvényre gyakorolt hatásáról?

(Veres Gábor)

25. Jelölje $S^3 = \{\sum_{i=0}^{3} u_i^2 = R^2\}$ a négydimenziós tér háromdimenziós gömbfelületét! Legyen egy mechanikai rendszer konfigurációs tere az S^3 felső fele, azaz $u_0 > 0$! Vetítsünk minden pontot az $(u_i = 0; \forall i)$ origóból kiinduló egyenes mentén az $(u_0 = R)$ északi sarkon átmenő érintőtérre! Az (u_1, u_2, u_3) pont képe legyen (x, y, z)! Írjuk fel a szabad mozgás Lagrange–függvényét az érintő tér változóiban! Legyen $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, és vizsgáljuk a $V(r) = \alpha/r$ Kepler–potenciálban történő mozgást! Határozzuk meg az összes független megmaradó mennyiséget és számoljuk ki Poisson–zárójelüket! Használjuk fel az eredményeket a rendszer kvantummechanikai tárgyalása során a Hamilton–operátor spektrumának meghatározásához!

(Bajnok Zoltán)

26. Tekintsük az m tömegű, l hosszúságú, g homogén gravitációs térben lévő matematikai inga azon általánosítását, melyben a tömegpont nem egy, hanem csak $k \geq 1$ körülfordulás után tér vissza eredeti helyzetébe! Klasszikusan ezen rendszernek k darab, egymással ekvivalens, legalacsonyabb energiájú állapota van. Mit mondhatunk a kvantálás során kapott rendszer legalacsonyabban fekvő első k állapotának energiájáról, és a hozzájuk tartozó állapotokról? Vizsgáljuk a rendszer diszkrét szimmetriáit mind klasszikusan, mind pedig kvantumosan, és gondoljunk az alagúteffektusra is!

(Bajnok Zoltán)

27. Amikor egy függvényt egy rácson reprezentálunk, a második deriváltat a következő formulával közelítjük:

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta x^2},$$

ahol f_i az i-edik rácspontbeli függvényérték, Δx a rácspontok távolsága. Tekintsünk egy rácsot, amelynek a rácspontjai egy kocka csúcsai. A kocka élei legyenek párhuzamosak az x, y, z tengelyekkel, és a közepe essen az origóba. Vegyünk egy nagy levegőt, és definiáljuk a z tengely körüli ϕ szög szerinti második derivált közelítését! Definiáljuk a közelítő L_z^2 operátort és írjuk fel a mátrixát! Definiáljuk a közelítő $L_x^2, L_y^2, \mathbf{L}^2$ operátorokat is, és írjuk fel a mátrixaikat!

Oldjuk meg a mátrixok sajátérték–problémáját! Mennyire kaptuk jó közelítéseit a valódi operátorok spektrumainak? Mik a sajátfüggvények (sajátvektorok), és van-e valami közük a valódi sajátfüggvényekhez? Tudnánk-e definiálni a közelítő L_x, L_y, L_z operátorokat? Ha igen, hogyan? Mi a helyzet a felcserélési relációkkal?

Bonusz–kérdés: Vajon véletlen-e, hogy a közelítő $\mathbf{L}^2$ operátor spektruma lényegében megegyezik három független, mágneses térbe helyezett feles spin spektrumával?

(Bihary Zsolt)

28. Modellezzük egy kétatomos molekula elektronszerkezetét a következő módon: mindkét atomon legyen két-két elektronpálya, amik csak az elektron spinjében különböznek. A Hamilton–operátor ezeknek az atomi pályáknak a bázisában, másodkvantált formalizmusban:

$$\begin{aligned}
H &= H_0 + H_t + H_e \\
H_0 &= -\varepsilon_1 \,(a_1^+ a_1 + b_1^+ b_1) - \varepsilon_2 \,(a_2^+ a_2 + b_2^+ b_2) \\
H_t &= -t \,(a_1^+ a_2 + a_2^+ a_1 + b_1^+ b_2 + b_2^+ b_1) \\
H_e &= U \,(a_1^+ a_1 b_1^+ b_1 + a_2^+ a_2 b_2^+ b_2),
\end{aligned}$$

ahol a_i illetve b_i az i-dik, + illetve − spinnel rendelkező atomi pályákhoz tartozó eltüntető operátorok. ε_1 illetve ε_2 az atomi pályák energiái, t az atomi pályák közötti hopping konstans, U pedig az ugyanazon az atomon lévő elektronok közötti taszító kölcsönhatás erőssége.

a.) Hány dimenziós a Fock–tér?

b.) Bizonyítsuk be, hogy a teljes elektronszám operátora felcserélhető a H operátorral! Ezt kihasználva, írjuk fel expliciten H különböző teljes elektronszámokhoz tartozó blokkjait mátrix alakban! Hány darab blokkunk van, és melyik hány dimenziós?

c.) Bizonyítsuk be, hogy a teljes spin operátora is felcserélhető a H operátorral! Ezt is kihasználhatjuk a következő problémák megoldásakor:

d.) Mennyi az alapállapoti energia egy, kettő, három, illetve négy elektron esetén?

e.) Két elektron esetén vizsgáljuk meg, hogy molekulánk kémiai jellege hogyan függ a H operátor paramétereitől! Apoláros, gyengén poláros, vagy erősen poláros a molekula alapállapotban? Ha az atomokat lassan eltávolítjuk, azaz t értéke lassan zérusra csökken, ionos vagy atomos állapotba disszociál a molekula? Elemezzük eredményeinket a kémia nyelvén is!

(Bihary Zsolt)

29. Üres Fabry-Perot interferométeren oldalirányból gerjesztett állapotban levő atom halad át. A gerjesztési energia egybeesik az interferométer egyik sajátfrekvenciájával. Számítsuk az atom mozgását szemiklasszikus közelítésben! Mi lesz a rendszer állapota az atom áthaladása után?

(Bene Gyula)

30. A kvantummechanikai méréselmélet hagyományos felépítésében a mérési folyamathoz a *tiszta állapotok kevert állapotokká* történő irreverzibilis átalakulása társul (lásd pl. Neumann János posztulátumát a $\hat{\rho}$ sűrűségoperátorról).

Tekintsük a következő — erősen túlegyszerűsített — esetet: egy elektron $\hat{s}_z$ dinamikai változóját egy „mérőberendezéshez" csatoljuk: a berendezés nem más, mint egy másik, szintén 1/2 spinű részecske. A mérési folyamat során a kezdő állapot a következő séma szerint alakul át a végső állapottá:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix},$$

ahol az első, illetve a második állapotvektor a mérőberendezésként funkcionáló (előzetesen az egyik sajátállapotába preparált) részecske, illetve a vizsgált elektron állapotát jellemzi.

a.) Konstruáljuk meg a fenti mérési folyamatnak megfelelő $\hat{H}_i$ kölcsönhatási Hamilton–operátort!

b.) Írjuk fel az elektronspin komponenseinek megfelelő mátrixokat, és fejezzük ki a $\hat{\rho}$ sűrűségmátrixot az α és β paraméterekkel! A fogalmak alkalmas definíciója alapján válaszoljunk a következő kérdésre: mindent egybevetve, vajon reverzibilis-e ez a mérési folyamat, vagy nem?

Jó tanács: feledkezzünk el a tankönyvek dogmáiról, és gondolkozzunk a modell keretein belül!

(— A. P. ötlete nyomán — Magyar Péter)

31. 1991-es felfedezésük óta a karbon nanocsövek szédületes karriert futottak be. Egy egyenes nanocsövet hengeres alakba feltekert grafit rétegként képzelhetünk el. A hengerek tipikus átmérője a nanométeres tartományba esik.

A sok lehetséges nanocső–típus közül a „karosszék-konfigurácóra" az jellemző, hogy a cső tengelyének iránya merőleges a réteget alkotó elemi hatszögek egyik élirányára. Ha a hengert tengelyével párhuzamos külső homogén mágneses térbe helyezzük, tiltott sáv (gap) jelenik meg a Fermi–energiánál. Hogyan függ a tiltott sáv szélessége a mágneses tér erősségétől?
Számot tudunk-e adni a mágneses tér által indukált fém–szigetelő átmenetről?

Elegendő a π pályákat figyelembe venni a tight binding modellben.

(Cserti József)

32. Egy megszámlálhatóan végtelen dimenziós anizotróp harmonikus potenciálban rezeg egy részecske. A dimenziókat sorszámozzuk: $0, 1, \ldots$. A 0. dimenzió irányába a többi irányhoz képest meglehetősen lapos a potenciál. A többi irányban pedig

a.) a dimenzió sorszámának négyzetével arányos, illetve

b.) a dimenzió sorszámával arányos a körfrekvencia.

Perturbáljuk meg ezt a rendszert egy gömbszimmetrikus, analitikus, térben lassan változó potenciállal. Vezessük le (kvantumosan) a 0. irányba való mozgás effektív egyenletét. Milyen problémák merülnek fel számítás közben? Mire hasonlít ez a modell?

(Borsányi Szabolcs)

33. Kvark Egon, megunva a Philadephia és Budapest közötti állandó ingázást, elhatározta, hogy szerény alagutat épít a homogén Föld belsejében Budapest és Philadelphia között. Csupán be kell szállnia Budapesten a föld alatti szánkóba, kezdősebesség sem kell, és nem sokára ki is szállhat az Új Világban. Egon persze állandóan lót–fut, mivel fizikus, így az optimális alakú alagútra van szüksége.

Hihetetlenül hangzik, de Egonnak sikerült az anyagiakat is előteremtenie — azonban az építkezési vállalat elvesztette a terveket. Így a vállalat főfizikusa az utolsó pillanatban a következő leegyszerűsített számítást végezte el: felvett egy kört, rajta két pontot, Philadelphiát (P) és Budapestet (B) — szimmetrikusan? Ne legyünk naivak! Ezután a két pont között kiszámította a brachisztochron görbét — mintha homogén nehézségi erőtér lenne jelen, és az így kapott alagutat berajzolta a Földbe. Hogy a további közelítgetésnek elejét vegye, az utazási időt már pontosan számította ki — vagyis a homogén nehézségi erőtér közelítést elejtette. És hogy a turpisságot valamennyire jóvátegye, a B és P pontokat a lehető legjobban választotta meg.

Mekkora késést jelent mindez Egonnak?

Piróth Attila

34. Ha az ember dolgozik, elfárad, és ez kihat munkájának hatásfokára. Modellezzük ezt a következő módon:

$$Q(t) = P(t)\,\varepsilon(t),$$

ahol $P(t)$ a pillanatnyi teljesítményünk, $\varepsilon(t)$ munkánk pillanatnyi hatásfoka, $Q(t)$ a pillanatnyi hasznos teljesítményünk.

$$\varepsilon(t) = 1 - f(t),$$

ahol $f(t)$ a pillanatnyi fáradtság, ami csökkenti hatásfokunkat. Ha túl fáradtak vagyunk, a hatásfok akár negatív is lehet: hullafáradtan az ember inkább rombol, mint épít. Fáradtságunk a már korábban kifejtett teljesítményünk kumulatív függvénye:

$$f(t) = \frac{1}{P_0 \tau} \int_{-\infty}^{t} dt' P(t') \exp((t' - t)/\tau)$$

ahol P_0 és τ a munkát végző személyre jellemző emberállandók.

a.) Tegyük fel, hogy állandó teljesítménnyel dolgozunk. Hogyan változik hasznos teljesítményünk az idő függvényében? Mekkora lesz hasznos teljesítményünk hosszú idő múlva? Mekkora teljesítménnyel tudjuk ezt maximalizálni? Mekkora ekkor a hatásfokunk? Mi a szerepe a kezdeti kipihentségnek/fáradtságnak? Mi a jelentése az emberállandóknak?

b.) Tegyük most fel, hogy főnökünk állandó hasznos teljesítményt vár el tölünk. Hogyan kell változtatnunk teljesítményünket, hogy eleget tegyünk elvárásainak? Milyen hosszú távon bírjuk ezt az iramot? Vajon milyen emberállandókkal bíró ember a főnök kedvence? Mi történik, ha másnaposan (fáradtan) kezdjük a munkát?

c.) Tegyük fel, hogy adott idő alatt adott mennyiségű munkát kell elvégeznünk. Hogyan dolgozzunk, hogy a lehető legkevesebb befektetett munka árán teljesítsük a feladatot?

(Bihary Zsolt)

\end{document}